ECOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

CONCOURS D'ENTRÉE

1979

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Ce sujet comporte 3 pages de texte

I

p et q sont des réels vérifiant $p + q = 1$ et $0 < p < 1$

1°) Développer en série entière les fonctions définies par :

$$f_1(x) = \frac{p}{1 - qx} \quad , \quad f_2(x) = \left(\frac{p}{1 - qx}\right)^2 \quad \text{puis} \quad f_k(x) = \left(\frac{p}{1 - qx}\right)^k$$

k étant un entier supérieur à 1 .

On utilisera les coefficients binômiaux pour l'écriture du développement de f_k .

2°) Quelle est la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$? de la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$?

3°) Quels sont les rayons de convergence des séries entières des questions 1°) et 2°) ?

II

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et qui possède la propriété suivante :

$P(X \geqslant k + \ell \mid X \geqslant k) = P(X \geqslant \ell)$ pour tous les entiers naturels k et ℓ

On note $P(X \geqslant 1) = q$ et on suppose $q \neq 0$.

1°) a. Calculer $P(X \geqslant n)$.

b. Quelle est la loi de X ? On pourra poser $P(X = 0) = p$.

2°) a. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?

.../...

b. X_1 , X_2 , ... , X_k sont k variables aléatoires indépendantes de même loi que X . Quelle est la loi de $X_1 + X_2 + ... + X_k$?

On pourra utiliser sans la démontrer l'identité :

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1} \qquad n , k \in \mathbb{N}$$

La notation $\binom{n}{k} = C_n^k$ désignant les coefficients binômiaux.

3°) Une urne contient trois boules noires et sept boules blanches. Tous les tirages sont faits avec remise et sont indépendants.

a. On fait autant de tirages qu'il est nécessaire pour obtenir une boule noire. (On admet que la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire est nulle).

Soit Y_1 le nombre de boules blanches tirées avant la première boule noire. Quelle est la loi de Y_1 ?

b. On fait autant de tirages qu'il est nécessaire pour avoir k boules noires ($k \geqslant 1$) (On admet que la probabilité de ne jamais avoir plus de (k - 1) boules noires est nulle).

Soit Y_k le nombre de boules blanches tirées avant la $k^{ième}$ boule noire. Quelle est la loi de Y_2 , de Y_k pour $k \geqslant 1$?

III

A toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on associe la fonction f_Z définie par la série entière :

$$f_Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{avec } a_n = P(Z = n)$$

1°) Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est non nul.

2°) Soient Z et Z' deux variables aléatoires indépendantes. Calculer $f_{Z+Z'}$, en fonction de f_Z et $f_{Z'}$.

3°) En utilisant f'_X et f''_X , calculer E(X) , Var(X) , $E(Y_k)$, $Var(Y_k)$, X et Y_k étant les variables aléatoires définies au II .

IV

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi commune est définie par :

$0 < p < 1$ $\qquad p + q = 1$ $\qquad P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ $\qquad \forall k \in \mathbb{N}$

On note $U = Sup(X,Y)$ et $V = Inf(X,Y)$

1°) a. Expliciter la loi conjointe de U et V .

b. Expliciter les lois marginales de U et V .

c. Quelle est la loi de U + V ?

2°) Dans cette question on donne à p la valeur $p = \frac{1}{2}$.

a. Calculer E(U) , Var(U) , E(V) , Var(V)

b. Calculer cov(U,V) (On pourra utiliser le 1°) c.)

3°) On pose W = X - Y

a. Donner la loi conjointe de V et W .

b. V et W sont-elles indépendantes ? Quelle est la loi de W ?

4°) On donne deux variables aléatoires X' et Y' à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi, et on suppose que

$W' = X' - Y'$ et $V' = Inf(X',Y')$ sont indépendantes.

On suppose de plus que $P(X' = n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a. Montrer que $P(V' = n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b. Calculer de deux manières :

$$\frac{P(X' = n+1 \ , \ Y' = n)}{P(X' = n \ , \ Y' = n)}$$

et en déduire la loi de X' et de Y' .

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail